Exercice 4

1.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 3^2-4x-3=-4\\ \text{et } \lim\limits_{x\to 1} x-1=0\\ \text{Or si } x>1,\ x-1>0\end{array}\right. \quad \text{Donc par quotient, } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$$

   Car on a dressé le tableau de signe de $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

   De la même manière on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 3^2-4x-3=-4\\ \text{et } \lim\limits_{x\to 1} x-1=0\\ \text{Or si } x<1,\ x-1<0\end{array}\right. \quad \text{Donc par quotient, } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$$

   On sait d'après le cours que la limite en l'infini d'un quotient est égale à la limite en l'infini du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré. On en déduit donc :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

2. On pose : $\begin{array}{cc} u(x)=3x^2-4x-3 & u'(x)=6x-4\\ v(x)=x-1 & v'(x)=1\end{array}$

   Ainsi on obtient :
   $f'(x)=\dfrac{(6x-4)(x-1)-(3x^2-4x-3)}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x+7}{(x-1)^2}$

3. Pour déterminer le sens de variation de f on cherche le signe de $f'(x)$. Or le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $3x^2-4x-3$ car le dénominateur est un carré donc est toujours positif.

   Cherchons le signe de $3x^2-4x-3$:
   $\Delta=36-84=-48$ Le disciminant étant négatif, le polynôme $3x^2-4x-3$ est toujours positif.

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		||		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	||	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) La fonction f est continue et strictement monotone sur $]-\infty\,;+\infty[$. De plus, α est compris entre $f(-1)$ et $f(0)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[-1\,;0]$
   (b) En utilisant le mode TABLE de la calculatrice on trouve : $-0,54<\alpha<0,53$.

Exercice 5

1. (a) Pour tout $x\neq 0$, $C_M(x)=\dfrac{x^3-7x^2+25}{x}=x^2-7x+25$
   (b) On a $C'_M(x)=2x-7$. Donc on en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
C_M	$+\infty$	$\searrow$	$12{,}75$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Le nombre de litres de vin à produire pour obtenir un coût moyen minimal est de 3,5 litres.

2. $B(x) = 25x - C(x) = 25x - (x^3 - 7x^2 + 25) = -x^3 + 7x^2$
3. On a $B'(x) = -3x^2 + 14x = x(-3x + 14)$.

   B' a donc deux racines 0 et $\dfrac{14}{3}$.Déduisons en le signe de $B'(x)$.

x	0		$\frac{14}{3}$		$+\infty$
$B'(x)$	0	$+$	0	$-$	
B	0	$\nearrow$	$50{,}82$	$\searrow$	$-\infty$

4. Le nombre de litre de vin à vendre pour obtenir un bénéfice maximal est de 5 litres de vin (puisque le maximum de la fonction B est atteint pour $x = \dfrac{14}{3} = 4,6666...$). Ce bénéfice s'élève à 50,81 euros (résultat arrondi au centième).